

Equações e curvas logísticas

- ❖ As curvas logísticas ou curvas sigmóides descrevem os processos de crescimento natural de qualquer sistema.
- ❖ Um processo de crescimento natural consiste em preencher um determinado ‘nicho’ desde o início até a sua saturação, uma vez que todo o nicho a ser preenchido apresenta limite de capacidade. Assim, o crescimento de uma população (humana ou de qualquer espécie animal), a difusão de uma epidemia ou de uma inovação tecnológica, o crescimento do mercado de um produto, o crescimento de um ser vivo ou de uma população, etc., são considerados como processos de crescimento natural e são descritos por curvas logísticas.
- ❖ Os processos de aprendizagem são também processos de crescimento natural, e por isso as curvas logísticas são também designadas por *curvas de aprendizagem*. Quando um indivíduo, ou um grupo, ou uma colectividade de pessoas aprende a realizar uma determinada tarefa ou aprende um determinado tema, o que está a acontecer é o crescimento cumulativo de ‘bits’ de informação, que começa com uma informação inicial e aumenta até ao esgotamento da informação para executar a tarefa ou para dominar o tema em questão.
- ❖ A curva logística é a expressão gráfica da *equação logística*. Seja N uma grandeza discreta (expressa por um número, ou seja, uma quantidade), que esteja a crescer dentro de um nicho que apenas pode suportar um número máximo de M unidades. A taxa diferencial de crescimento da grandeza N dentro deste sistema é dada pela equação:

$$\frac{dN}{dt} = aN(M - N)$$

que é a equação diferencial logística, proposta em 1838 pelo matemático e clérigo belga P. F. Verhulst, onde a representa o coeficiente de proporcionalidade – em outras palavras, a taxa de crescimento dN/dt é directamente proporcional a N (tamanho do sistema no instante t) e a $(M-N)$ (o que falta para o sistema crescer até M no instante t).

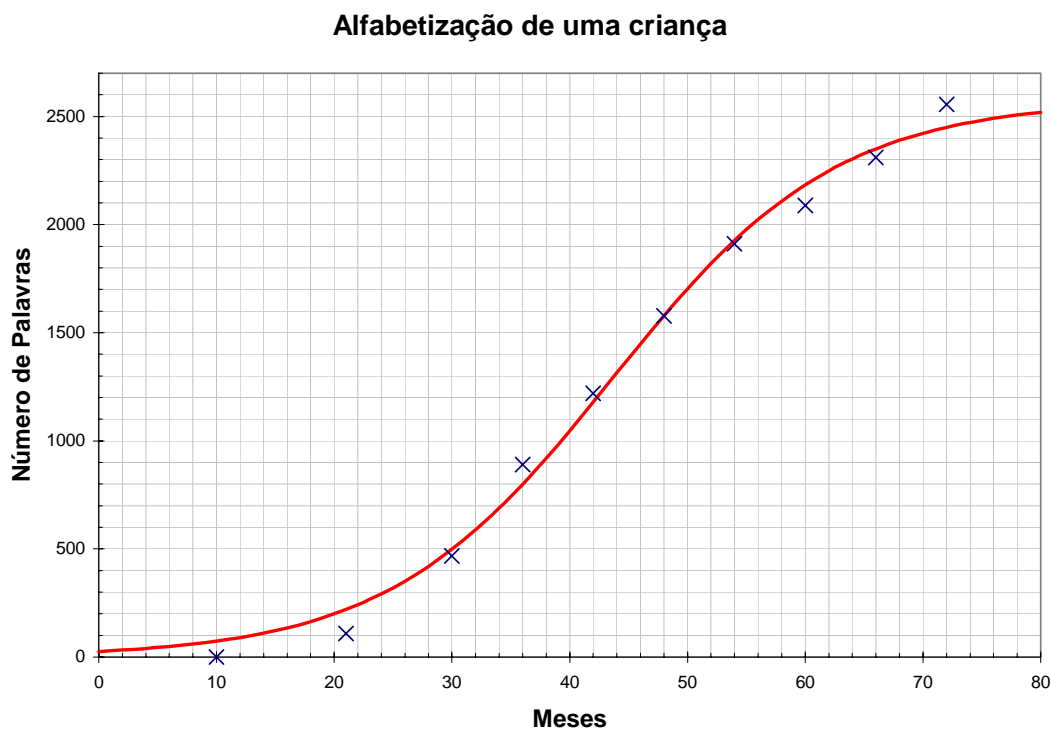
- ❖ A integral desta equação diferencial dá-nos a *equação logística*:

$$N = \frac{M}{1 - e^{-a(t-t_0)}}$$

- ❖ O coeficiente a representa fisicamente a *capacidade de crescimento do sistema*. No caso de processos de aprendizagem significa a *taxa de aprendizagem* do sistema. Este coeficiente, ou taxa

de aprendizagem, pode ser determinado graficamente através do uso da recta logística (. t_0 representa o tempo em que o crescimento atinge a metade do seu valor máximo).

- ❖ As equações e curvas logísticas constituem actualmente uma poderosa e simples ferramenta matemática para se fazerem previsões sobre o crescimento de sistemas, como, por exemplo, crescimento de populações, mercados, etc.
- ❖ Na curva abaixo temos a representação de uma típica curva logística:



Curva logística (ou curva de aprendizagem) correspondente ao processo de aquisição de vocabulário de uma criança entre o seu nascimento e os seis anos, ou seja, durante o período pré-escolar.

Formulação de Fisher-Pry – Rectas Logísticas

- ❖ A equação logística pode ser também apresentada na forma proposta por Fisher-Pry¹ como uma função de $f = N/M$, que resulta em:

$$f = \frac{1}{1 + e^{-a(t-t_0)}}$$

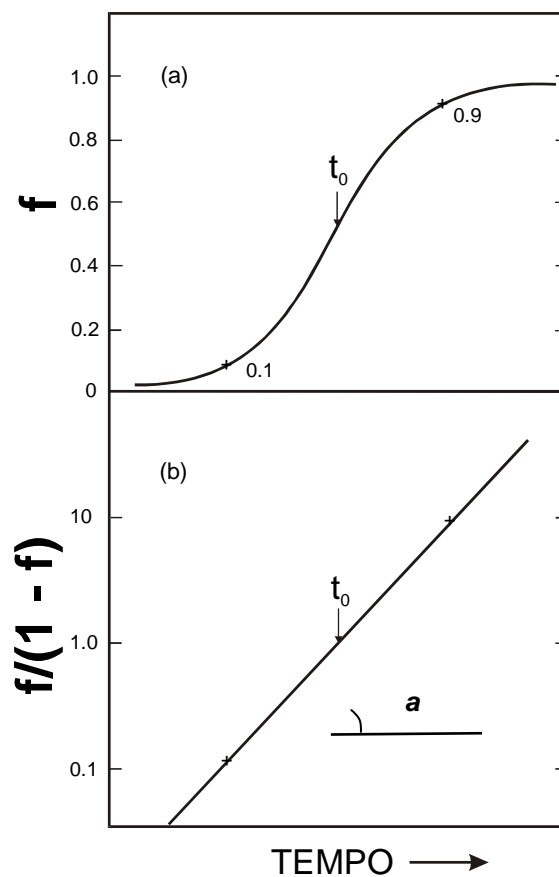
¹ FISHER, J., and PRY, R.(1971): «A Simple Substitution Model of Technological Change». *Technological Forecasting and Social Change* 3, 75-88.

❖ Esta formulação apresenta a vantagem de podermos transformar a curva sigmóide em uma recta, fazendo:

$$\ln \frac{f}{1-f} = a(t - t_0)$$

❖ O termo da direita nesta equação é uma recta com inclinação (declive) a.

❖ A representação gráfica de ambas as equações aparece na figura abaixo, nomeadamente (a) – curva logística de Fisher-Pry, (b) recta logística.



❖ Chama-se tempo característico Δt do crescimento o tempo que o sistema leva para crescer de 10% até 90% do seu valor máximo (0,1 até 0,9).

A Lei de Potência de Devezas-Modelski

❖ Num trabalho publicado em 2003, Devezas e Modelski¹ demonstraram que a evolução do sistema mundial é composto por uma espécie de cascata de oito processos co-evolucionários, caracterizada por uma lei de potência dada por $g = 2^n$, onde g representa o número de gerações conduzindo cada um dos processos, a base 2 expressa o facto de que cada processo é conduzido por um múltiplo inteiro de duas gerações e n é igual a qualquer número natural (1, 2, 3... n).

❖ Esta cascata de processos co-evolucionários expressa o facto de que a evolução do sistema mundial, ou seja, da formação do sistema social humano, consiste em uma sequência de processos Darwinianos (evolucionistas) com uma certa duração no tempo, sendo cada processo um múltiplo inteiro do processo seguinte, exibindo assim um aspecto geral de auto-semelhança («self-similarity»). São, portanto, processos com um aspecto ‘fractal’ no seu conjunto. A possibilidade de representar este processo evolucionista através de uma lei de potência implica que este apresenta a propriedade chamada de «self-organized criticality».

❖ A equação geral que expressa o fenómeno é:

$$f = \frac{1}{1 + e^{-[\frac{\delta}{2^n}(t-t_0)']}}$$

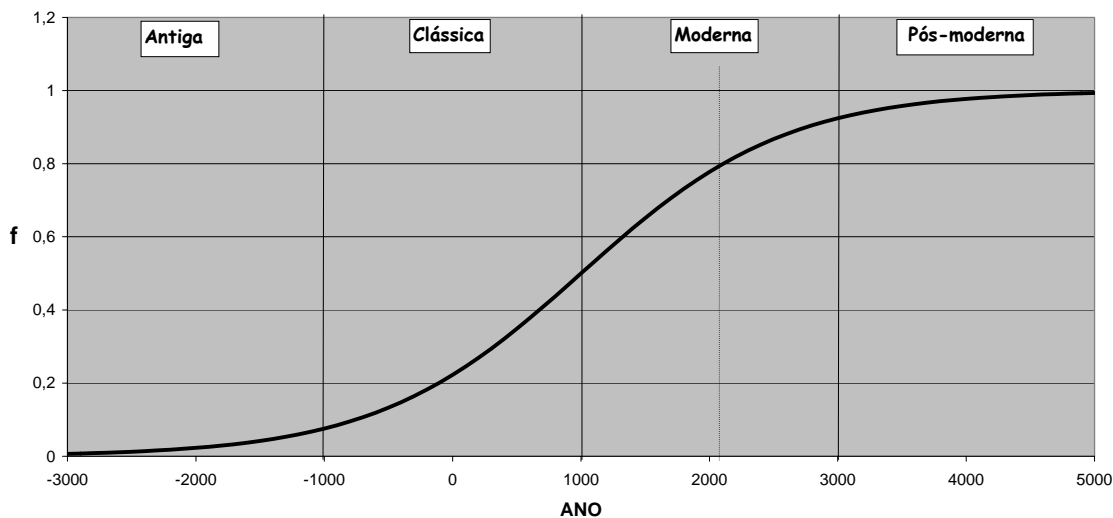
❖ Assim, para $n = 1$ temos $g = 2$, que corresponde à *Onda de Kondratieff (onda K)*; para $n = 2$ temos $g = 4$, que corresponde ao *Ciclo Longo*, e assim por diante. O processo mais longo, correspondendo a $n = 8$ ($g = 256$ gerações) apresenta uma duração de cerca de oito mil anos (mais exactamente 256×30 anos = 7680 anos), representa a curva logística envelope contendo todos os demais processos co-evolucionários. O processo da *sucessão de gerações* (com cerca de 30 anos) constitui assim o ritmo básico que controla todo o sistema evolucionista, ou seja, a evolução do sistema mundial é controlado pelos chamados ‘determinantes biológicos’. Para detalhes sobre a acção destes determinantes ver Devezas e Corredine²

❖ Esta curva logística envelope, cuja representação esquemática é mostrada a seguir, é a curva de aprendizagem da formação do sistema mundial.

¹ DEVEZAS, Tessaleno e MODELSKI, George (2003), «Power Law Behavior and World System Evolution: A Millennial Learning Process», *Technological Forecasting & Social Change*, vol. 70, pp. 819-859.

² DEVEZAS, T. e CORREDINE, J. (2001), «The Biological Determinants of Long Wave Behavior in Socioeconomic Growth and Development». *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 68, pp. 1-57. Este trabalho foi galardoado com o prémio «Elsevier 2001 Prize for the Outstanding Paper».

Curva logística da evolução do Sistema Mundial



❖ Esta curva logística, ou curva de aprendizagem, expressa a forma como a espécie humana evoluiu ao longo dos últimos cinco milénios, ou seja, expressa a 'estória' dos humanos a 'aprender a serem humanos', a aprender a viver em sociedade uns com os outros, estruturando uma sociedade global cada vez mais complexa. Como se pode observar pela curva, é um processo ainda não completo, embora tenha já ultrapassado a marca dos 80% da sua formação.

❖ Tal facto implica que todas as características essenciais do *sistema mundial* já estão formados e em plena acção, encaminhado para um momento de transição para um novo e desconhecido *sistema mundial* (cérebro global..., governo global..., singularidade...???). O panorama global que se descortina na actualidade apresenta nítidos sintomas de saturação (questões ambientais, energéticas, geo-políticas, etc., conforme abordados no texto do livro) e de que estamos no limiar de uma era de transição para um novo sistema, que conforme foi visto no capítulo 8 deverá estar já a ser definido até finais do século XXI e transição para o século XXII.